# Concours Puissance 11 - LaSalle 2015

Corrigé détaillé de l'épreuve de mathématiques

## Réponses aux exercices

## ➽ Exercice n° 1 : FFVV - *Étude de fonction*

La courbe représentée est celle de $f'$ et les affirmations portent sur la fonction $f$ donc soyez vigilant aux affirmations pièges.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies \boxed{f(x) = \begin{cases} x^2 + k_1 & \text{si } x \leqslant 1 \text{ et } k_1 \in \mathbb{R} \\ \ln x + x + k_2 & \text{si } x > 1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

**a) Faux**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x + k_2 = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par somme, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc $(\Gamma)$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

**b) Faux**

Pour tout $x \in ]-\infty\,; 1]$, $f(x) = x^2 + k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$.

**c) Vrai**

Si $(\Gamma)$ passe par $\Omega(1\,;1)$ alors on peut déterminer la valeur de $k_1$ :

$$\Omega(1\,;1) \in (\Gamma) \iff f(1) = 1 \iff 1^2 + k_1 = 1 \iff k_1 = 0$$

De plus, $f$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ d'où :

$$\Omega(1\,;1) \in (\Gamma) \iff f(1) = 1 \iff \ln 1 + 1 + k_2 = 1 \iff k_2 = 0$$

On a alors :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln x + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

**d) Vrai**

$x = 2 > 1$ donc $f(2) = \ln 2 + 2$.

## Exercice n° 2 : FFFF - *Fonction définie par deux paramètres*

**a) Faux**

Attention, $a$ et $b$ sont des constantes et on dérive par rapport à $x$. On utilise la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et on garde le coefficient $\dfrac{b}{a}$ qui est une constante. On obtient :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \in ]-a\,;a[,\ f'(x) &= \frac{b}{a} \times \frac{\left(a^2-x^2\right)'}{2\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \frac{b}{a} \times \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \boxed{\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}}\end{aligned}$$

**b) Faux**

Si $a = 6$ et $b = 3$ alors on a $I = [-6\,;6]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{36-x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{-x}{2\sqrt{36-x^2}}$.

| $x$ | $-6$ | | $0$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| |
| $f$ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ |

Donc pour tout $x \in I$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

**c) Faux**

Si $a = b = 1$ alors on a $I = [-1\,;1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| |
| $f$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

Or $\sqrt{2} \simeq 1{,}4 > 1$ donc l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ n'admet pas de solutions sur $I$.

**d) Faux**

Si $a = b$ alors $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

La tangente et la droite d'équation $y = x - 5$ sont parallèles signifie qu'elles ont le même coefficient directeur.
On a d'une part le coefficient directeur de la tangente qui est défini par le nombre dérivé $f'(x)$ et on a d'autre part le coefficient directeur de la droite qui est égale à 1 d'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) = 1 &\iff \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 1 \\
&\iff -x = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{avec } \sqrt{a^2 - x2} > 0 \text{ donc } x < 0 \\
&\iff (-x)^2 = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \\
&\iff x^2 = a^2 - x^2 \\
&\iff 2x^2 = a^2 \\
&\iff x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}} < 0 \text{ : impossible}
\end{aligned}$$

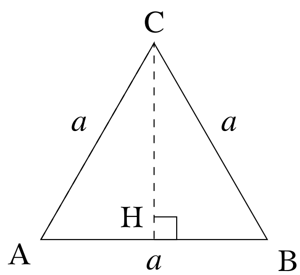
Donc il n'existe qu'une seule et unique tangente à $(\Gamma)$ parallèle à la droite d'équation $y = x - 5$, c'est celle que l'on trace en $x = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

## ➽ Exercice n° 3 : VFVV - *Bases de la géométrie*

**a) Vrai**

Par définition les coordonnées d'un vecteur directeur de $(D)$ se "lisent" devant le paramètre $t$ dans la représentaion paramètrique de la droite. Ce vecteur $(1;1;1)$ peut alors s'écrire $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

**b) Faux**




$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\\ &= -AB\times AH\\ &= -a\times\frac{a}{2}\\ &= -\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

**c) Vrai**

$(1+\mathrm{i})^4 = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -4$

**d) Vrai**

$|z-(-4+3\mathrm{i})| = 5 \iff \Omega M = 5$ et si $z=0$ alors $|0-(-4+3\mathrm{i})| = |4-3\mathrm{i}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$ donc l'ensemble cherché est bien un cercle de centre $\Omega$ et de rayon 5 qui passe par l'origine O.

## Exercice n° 4 : FFVV - *Questions de logique*

On note :

- $A$ : « Agnan est présent » ;
- $C$ : « Clothaire est présent » ;
- $E$ : « Eudes est présent » ;
- $G$ : « Geoffroy est présent » ;
- $R$ : « Rufus est présent ».

Leurs complémentaires respectifs $\overline{A}$, $\overline{C}$, $\overline{E}$, $\overline{G}$, $\overline{R}$ signifiant qu'ils sont absents.Les affirmations de l'énoncé se traduisent alors ainsi :

① Clothaire refuserait de venir si Rufus était présent : $R \implies \overline{C}$ et $C \implies \overline{R}$ sa contraposée ;
② Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus : $A \cup R \implies E$ ;
③ Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre : $A \iff G$.

**a) Faux**

Si Clothaire n'est pas venu alors Rufus est présent se traduit par : $\overline{C} \implies R$ qui n'est pas équivalente à l'affirmation ① de l'énoncé.

**b) Faux**

Si Rufus était absent alors Clothaire est venu se traduit par : $\overline{R} \implies C$ qui est la contraposée de l'affirmation précédente.

**c) Vrai**

Si Agnan est venu alors Eudes aussi et Geoffroy aussi d'après ② et ③.

**d) Vrai**

Si Clothaire est venu alors Rufus est absent d'après ①. Comme Rufus est absent mais que Eudes est venu alors Agnan est venu (afin de vérifier ②). Comme Agnan est venu, Geoffroy aussi d'après ③.

## ➽ Exercice n° 5 : VVVF - *Petite démonstration*

**a) Vrai**

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) &= \frac{(x^2)'(2x-1) - x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\
&= \frac{2x(2x-1) - x^2 \times 2}{(-1 \times (1-2x))^2} \\
&= \frac{2x(2x-1-x)}{(-1)^2(1-2x)^2} \qquad \text{(on factorise par } 2x\text{)} \\
&= \frac{2x(x-1)}{(1-2x)^2} \\
&= \boxed{-\frac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}}
\end{aligned}$$

**b) Vrai**

On cherche les valeurs de $x$ pour lesquelles le nombre dérivé $f'(x)$ représentant le coefficient directeur de la tangente en $x$ est égale au coefficient directeur de la droite d'équation $y = -x + 5$, donc on résout :

$$\begin{aligned}
f'(x) = 1 &\iff \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} = -1 \\
&\iff 2x(x-1) = -(2x-1)^2 \qquad \left(x \neq \tfrac{1}{2}\right) \\
&\iff 2x^2 - 2x + 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\
&\iff 6x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad (\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 12 > 0)
\end{aligned}$$

L'équation a donc deux solutions et $(\Gamma)$ admet par conséquent deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x + 5$.

**c) Vrai**

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in I,\ k'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\
&= \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \div \frac{x^2}{2x-1} \\
&= \frac{2 \times \cancel{x}(x-1)}{(2x-1) \times \cancel{(2x-1)}} \times \frac{\cancel{2x-1}}{x \times \cancel{x}} \\
&= \frac{2x-2}{x(2x-1)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} - \frac{2}{2x-1} &= \frac{2(2x-1) - 2x}{x(2x-1)} \\
&= \frac{2x-2}{x(2x-1)}
\end{aligned}$$

**d) Faux**

Si $x \in I$, $f'$ n'est pas strictement positive donc $f$ n'est pas strictement croissante sur $I$, en effet :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2x-1)^2$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\|\|$ | $\searrow$ | $f(1)$ | $\nearrow$ | |

## Exercice n° 6 : FVFF - *Calculs de limites*

**a) Faux**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{X\to 0}\mathrm{e}^X=\mathrm{e}^0=1\end{array}\right\}\text{donc par composition, }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1}$$

**b) Vrai**

Utilisons la définition du nombre dérivé à savoir que si $f$ est dérivable en $a$ alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
En posant $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$, il vient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}-\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{0}}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=-f'(0)\\&=-(-\mathrm{e}^0)=1\end{aligned}$$

**c) Faux**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\mathrm{e}^x}(1+\mathrm{e}^{-x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}(1-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x})}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}}=1$ et par conséquent la courbe $\Gamma$ admet la droite d'équation $y=1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

**d) Faux**

$u_n=\dfrac{\sin(n)-2n}{n+1}=\dfrac{\sin(n)}{n+1}-\dfrac{2n}{n+1}$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$-1\leqslant\sin n\leqslant 1\iff-\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{\sin n}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin 2n}{n+1}=0$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{2n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{2n}{n}=-2$ donc $u_n$ converge vers $-2$.

## ➠ Exercice n° 7 : FVVV - *Calcul intégral*

**a) Faux**

$$\int_1^{e} \frac{2x+1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{e}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[2\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^{e} = \left(2\ln e - \frac{1}{e}\right) - (2\ln 1 - 1) = \boxed{3-\frac{1}{e}}$$

**b) Vrai**

$$\int_1^{2} \frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_1^{2} \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{\frac{u'}{u^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_1^{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2+5}{10}\right) = \boxed{\frac{3}{20}}$$

**c) Vrai**

On peut remarquer que $(x-\ln(1+x))' = 1-\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{2+x}$.
Donc $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x = [x-\ln(1+x)]_0^{\alpha} = (\alpha-\ln(1+\alpha)) - (0-\ln 1) = \boxed{\alpha-\ln(1+\alpha)}$.

**d) Vrai**

Pour tout $x$ de $\left[e\,;e^2\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
e \leqslant x \leqslant e^2 &\iff \ln e \leqslant \ln x \leqslant \ln e^2\\
&\iff -x\times\ln e \geqslant -x\times\ln x \geqslant -x\times\ln e^2 \quad (\text{car } -x<0)\\
&\iff -x\times 1 \geqslant -x\ln x \geqslant -x\times 2\\
&\iff \int_e^{e^2} -x\mathrm{d}x \geqslant \int_e^{e^2} -x\ln x\mathrm{d}x \geqslant \int_e^{e^2} -2x\mathrm{d}x\\
&\iff -\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} \geqslant L \geqslant -2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2}
\end{aligned}$$

Or $-\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\left(e^2\right)^2-e^2\right) = -\dfrac{1}{2}\left(e^4-e^2\right) = -\dfrac{1}{2}e^2\left(e^2-1\right) = \dfrac{1}{2}e^2\left(1-e^2\right)$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} \geqslant L \geqslant -2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} &\iff \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}e^2\left(1-e^2\right) \leqslant L \leqslant \frac{1}{2}e^2\left(1-e^2\right)\\
&\iff \boxed{e^2\left(1-e^2\right) \leqslant L \leqslant \frac{e^2}{2}\left(1-e^2\right)}
\end{aligned}$$

## Exercice n° 8 : VVVV - *Fonction exponentielle*

**a) Vrai**

$F_1'(x) = -e^{-x} - 2$ et pour tout réel $x$, $F_1'(x) < 0$ donc $F_1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty\end{array}\right\}\text{donc par somme, } \lim_{x\to+\infty} F_1(x) = +\infty$$

Et,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty\end{array}\right\}\text{donc par somme, } \lim_{x\to-\infty} F_1(x) = -\infty$$

$F_1$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et l'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution en vertu du théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires TVI).

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ $-\infty$ |

On a par ailleurs $F_1(0) = 1 > 0$ et $F_1(1) = e^{-1} - 2 = \dfrac{1}{e} - 2 < 0$ donc $0 < \alpha < 1$.

**b) Vrai**

$x_n$ converge et $x_{n+1} = g(x_n)$ donc $(x_n)$ converge vers la solution de l'équation $g(x) = x$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}+2} = x \\ &\iff e^{-x}(x+1) = x(e^{-x}+2) \\ &\iff \cancel{xe^{-x}} + e^{-x} = \cancel{xe^{-x}} + 2x \\ &\iff e^{-x} - 2x = 0 \\ &\iff F_1(x) = 0 \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

Donc $(x_n)$ converge vers $\alpha$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

**c) Vrai**

La tangente à $(C)$ en $x = a$ a pour équation $y = F_1'(a)(x-a) + F_1(a)$. L'abscisse $x$ du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
F_1'(a)(x-a) + F_1(a) = 0 &\iff xF_1'(a) - aF_1'(a) = -F_1(a) \\
&\iff x = \frac{aF_1'(a) - F_1(a)}{F_1'(a)} \\
&\iff x = \frac{a\left(-\mathrm{e}^{-a} - 2\right) - \left(\mathrm{e}^{-a} - 2a\right)}{-\mathrm{e}^{-a} - 2} \\
&\iff x = \frac{-a\mathrm{e}^{-a} - 2a - \mathrm{e}^{-a} + 2a}{-\mathrm{e}^{-a} - 2} \\
&\iff x = \frac{-\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{-\left(\mathrm{e}^{-a} + 2\right)} \\
&\iff x = g(a)
\end{aligned}$$

Donc cette tangente coupe bien l'axe des abscisses en un point de coordonnées $(g(a)\,;0)$.

**d) Vrai**

On reconnaît l'algorithme de recherche de la solution de $F_1(x) = 0$ par dichotomie. Celui-ci permet d'afficher un encadrement de la solution entre `A` et `B`. Or l'algorithme affiche `A = 0,3125` et `B = 0,375` et la solution de l'équation $F_1(x) = 0$ est $\alpha$ donc on peut déduire l'encadrement de $\alpha$ suivant : $0{,}3125 < \alpha < 0{,}375$.

## Exercice n° 9 : VFFV - *Fonction exponentielle et logarithme*

**a) Vrai**

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 2 - \left[(x-1)' \ln(x-1) + (x-1)\left(\ln(x-1)\right)'\right] \\
&= 2 - \left(1 \times \ln(x-1) + (x-1) \times \frac{1}{x-1}\right) \\
&= 2 - \ln(x-1) - 1 \\
&= 1 - \ln(x-1) \\
&= \boxed{1 + \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} \quad \text{car } \ln a = -\ln\left(\frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

**b) Faux**

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1) \times 1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2} \times \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1} \\
&= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} \\
&= \boxed{\frac{g\left(x^2\right)}{x^2(x^2-1)}}
\end{aligned}
$$

**c) Faux**

Étudions le signe de $g'(x)$ :

$$
\begin{aligned}
1 - \ln(x-1) \geqslant 0 &\iff -\ln(x-1) \geqslant -1 \\
&\iff \ln(x-1) \leqslant 1 \\
&\iff \mathrm{e}^{\ln(x-1)} \leqslant \mathrm{e}^1 \\
&\iff x - 1 \leqslant \mathrm{e} \\
&\iff x \leqslant \mathrm{e} + 1
\end{aligned}
$$

| $x$ | $1$ | | $\mathrm{e}+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | \|\| | $\nearrow$ | $g(\mathrm{e}+1)$ | $\searrow$ | |

Donc $g$ admet un maximum en $x = \mathrm{e} + 1$.

**d) Vrai**

$$\begin{aligned}
f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) &= \frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{\alpha}}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}\\
&= \frac{\ln\left(e^{\ln\sqrt{\alpha}^2}-1\right)}{\sqrt{\alpha}}\\
&= \frac{\ln\left(e^{\ln\alpha}-1\right)}{\sqrt{\alpha}}\\
&= \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
g(\alpha)=0 &\iff 2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0\\
&\iff \ln(\alpha-1)=\frac{2\alpha}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) &= \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}\\
&= \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}}\times\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\\
&= \frac{2\cancel{\alpha}\sqrt{\alpha}}{(\alpha-1)\times\cancel{\alpha}}\\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

## Exercice n° 10 : FVFV - *Suite et trigonométrie*

**a) Faux**

$$\begin{aligned}
u_{n+8} &= (-1)^{n+8} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \times (n+8)\right) \\
&= (-1)^n \times (-1)^8 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n + 2\pi\right) \\
&= (-1)^n + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad \text{car} \quad \sin(x+2\pi) = \sin x \\
&= u_n
\end{aligned}$$

**b) Vrai**

Par définition de la fonction sinus, on a pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leqslant 1 \iff -2 \leqslant 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leqslant 2$$

Si $n$ est pair alors $(-1)^n = 1$ et :

$$-1 \leqslant (-1)^n + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leqslant 3$$

Si $n$ est impair alors $(-1)^n = -1$ et :

$$-3 \leqslant (-1)^n + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leqslant 1$$

Par conséquent pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$-3 \leqslant u_n \leqslant 3$$

**c) Faux**

$$\left.\begin{aligned}
u_0 &= 2\sin 0 = 0 \\
u_1 &= -1 + 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} - 1 \\
u_2 &= 1 + 2\sin\frac{\pi}{2} = 3 \\
u_3 &= -1 + 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} - 1
\end{aligned}\right\} u_0 < u_1 < u_2 \text{ mais } u_3 < u_2$$

Donc $(u_n)$ n'est pas monotone.

**d) Vrai**

$-3 \leqslant u_n \leqslant 3 \iff \dfrac{-3}{n} \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{3}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$.

## Exercice n° 11 : VVVV - *Suite de nombres complexes*

**a) Vrai**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= |z_{n+1}| \\ &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n\right| \\ &= \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| |z_n| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \times u_n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_n \end{aligned}$$

Donc $(u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $u_0 = |z_0| = |2| = 2$.

**b) Vrai**

$$\begin{aligned} \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} &= \frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n - z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n} \\ &= \frac{\cancel{z_n}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1\right)}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\cancel{z_n}} \\ &= \frac{\frac{1+\mathrm{i}-2}{2}}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\cancel{z_n}} \\ &= \frac{-1+\mathrm{i}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1+\mathrm{i}} \\ &= \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \times \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{-1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+1}{1^2 - \mathrm{i}^2} \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i} \end{aligned}$$

**c) Vrai**

$A_n$ appartient au disque de centre O et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la distance $OA_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
OA_n \leqslant \frac{1}{2} &\iff |z_n| \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff u_n \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{4} \\
&\iff \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \ln\frac{1}{4} \\
&\iff n\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant -\ln 4 \\
&\iff n \geqslant \frac{-\ln 2^2}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \quad \text{avec } \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \\
&\iff n \geqslant \frac{-2\ln 2}{\ln\sqrt{2} - \ln 2} \\
&\iff n \geqslant \frac{-2\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2} \\
&\iff n \geqslant \frac{-2\cancel{\ln 2}}{-\frac{1}{2}\cancel{\ln 2}} \\
&\iff n \geqslant 4
\end{aligned}$$

**d) Vrai**

$\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i} \implies \left|\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - z_O}\right| = |\mathrm{i}| \implies \dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1 \implies A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$ et par conséquent le triangle $OA_nA_{n+1}$ est isocèle en $A_{n+1}$.

$\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i} \implies \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - z_O}\right) = \arg \mathrm{i} \implies \left(\overrightarrow{OA_{n+1}}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$.

## Exercice n° 12 : FVVV - *Géométrie et complexes*

**a) Faux**

$$z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - 2i}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = 1 - 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + 2 \times (-1)e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 1 + 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

**b) Vrai**

$$OM' = 1 \iff |z'| = 1 \iff \left|\frac{z-2i}{z}\right| = 1 \iff |z - 2i| = |z| \iff BM = OM$$

Donc $M$ appartient la médiatrice du segment $[OB]$.

**c) Vrai**

$M'$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon 1 signifie que :

$$\begin{aligned} AM' = 1 &\iff |z' - 1| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z-2i}{z} - 1\right| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z - 2i - z}{z}\right| = 1 \\ &\iff \left|\frac{-2i}{z}\right| = 1 \\ &\iff |-2i| = |z| \\ &\iff 2 = |z| \\ &\iff OM = 2 \end{aligned}$$

Donc $M$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 2.

**d) Vrai**

$z'$ est un imaginaire pur signifie que le point $M'$ appartient à l'axe des imaginaires c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \arg z' = \pm\frac{\pi}{2} &\iff \arg\left(\frac{z-2i}{z-0}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \\ &\iff \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_O}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \\ &\iff \left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{BM}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc le point $M$ appartient au cercle de diamètre $[OB]$ privé de $O$ et de $B$.

## Exercice n° 13 : VFVV - *Variables aléatoires réelles : Cours - Calculs*

**a) Vrai**

$$P(X>n)=1-P(X\leqslant n)=1-\int_0^n \lambda e^{-\lambda t}dt=1-\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^n=1-\left(-e^{-\lambda n}+e^0\right)=e^{-\lambda n}=\frac{1}{e^{\lambda n}}$$

Si $\lambda=1$, on a bien $P(X>n)=\dfrac{1}{e^n}$.

**b) Faux**

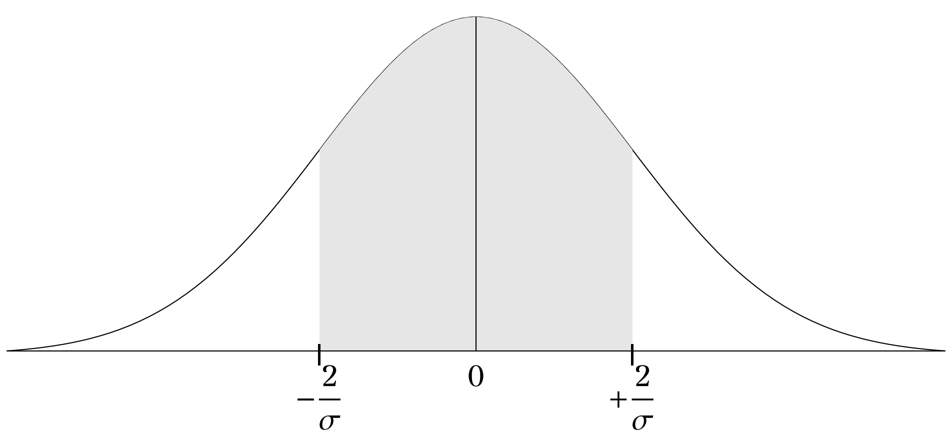
Par définition, $P_{X>a}(X>b)=P(X>b-a)$ donc $P_{X>n}(X>n+1)=P(X>n+1-n)=P(X>1)$

**c) Vrai**

Par définition, $Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)\implies Z=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$.

**d) Vrai**

$$\begin{aligned}P(7\leqslant Y\leqslant 11) &= P\left(\frac{7-9}{\sigma}\leqslant\frac{Y-9}{\sigma}\leqslant\frac{11-9}{\sigma}\right)\\ &= P\left(-\frac{2}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\frac{2}{\sigma}\right)\\ &= 2P\left(0\leqslant Z\leqslant\frac{2}{\sigma}\right)\quad\text{par symétrie de la courbe de Gauss}\end{aligned}$$



## ➽ Exercice n° 14 : FFVV - *Probabilités conditionnelles*

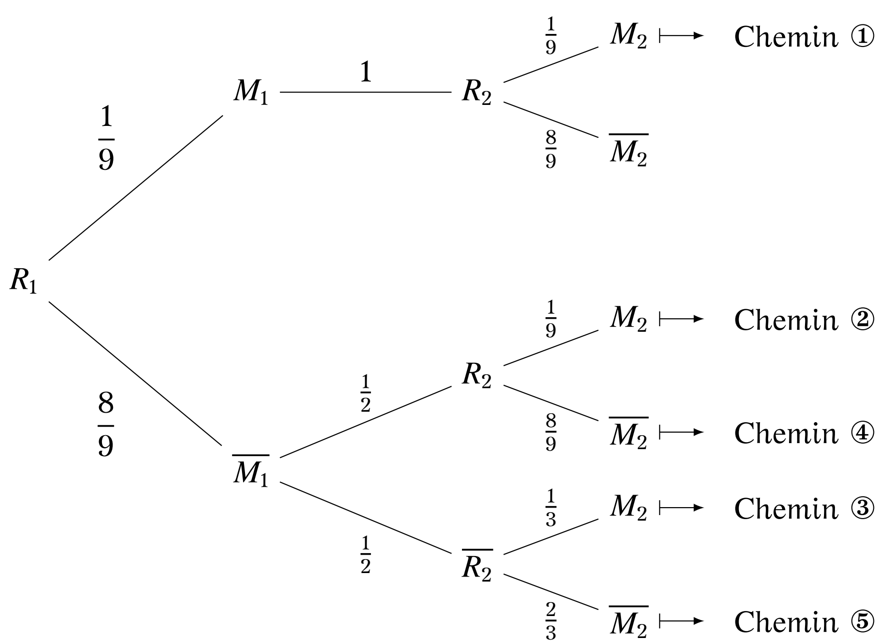
Soit les événements suivants :

- $M_n$ : « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n$^{\text{ième}}$ représentation » ;
- $R_n$ : « l'acteur relit son texte le soir de la n$^{\text{ième}}$ représentation » ;
- $\overline{M_n}$ et $\overline{R_n}$ leurs événements contraires.

On a par ailleurs d'après l'énoncé :

$$p_{R_n}(M_n) = \frac{1}{9} \qquad p_{\overline{R_n}}(M_n) = \frac{1}{3} \qquad p_{M_n}(R_{n+1}) = 1 \qquad p_{\overline{M_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{2} \qquad p(R_1) = 1$$

L'arbre de probabilités de la situation présentée est alors le suivant :




**a) Faux**

L'événement : « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation » se traduit par le chemin ① dans l'arbre donc :

$$p\left(M_1 \cap M_2\right) = \frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{81}}$$

**b) Faux**

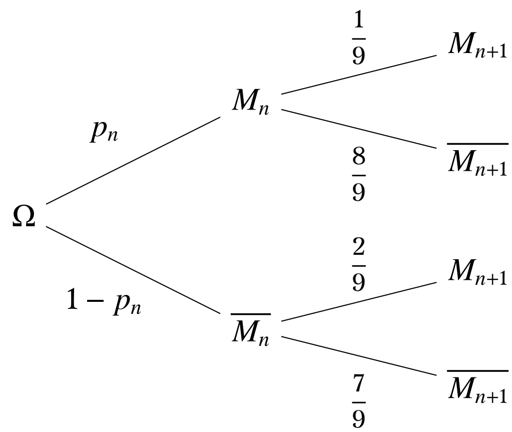
L'événement : « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la deuxième représentation » se traduit par les chemins ①, ② et ③ dans l'arbre donc :

$$p\left(M_2\right) = \frac{1}{81} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{17}{81}}$$

**c) Vrai**

On cherche $p_{\overline{M1}}\left(\overline{M_2}\right) = \dfrac{p\left(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}\right)}{p\left(\overline{M_1}\right)} = \dfrac{\text{chemin ④ + chemin ⑤}}{p\left(\overline{M_1}\right)} = \dfrac{\frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$.

**d) Vrai**




$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= p(M_{n+1}) \\
&= p(M_n \cap M_{n+1}) + p\left(\overline{M_n} \cap M_{n+1}\right) \\
&= p(M_n) \times p_{M_n}(M_{n+1}) + p\left(\overline{M_n}\right) \times p_{\overline{M_n}}(M_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{9} + (1 - p_n) \times \frac{2}{9} \\
&= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} p_n \\
&= \boxed{\frac{2 - p_n}{9}}
\end{aligned}
$$

$p_{M_n}(M_{n+1})$ s'obtient en constatant dans l'arbre initial que chaque fois que $M_n$ est réalisé alors $M_{n+1}$ a une probabilité égale à $\dfrac{1}{9}$ de se réaliser. De même, la question précédente permet de constater que chaque fois que $\overline{M_n}$ est réalisé alors $\overline{M_{n+1}}$ a une probabilité égale à $\dfrac{7}{9}$ de se réaliser.

## Exercice n° 15 : VVVF - *Logique et géométrie dans l'espace*

**a) Vrai**

$(\Delta)$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix}-1\\m\\1\end{pmatrix}$ et $(P)$ de vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont parallèle si et seulement si :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1\\m\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0 &\iff -1-m+2=0\\ &\iff m=1\end{aligned}$$

**b) Vrai**

Si $m=1$ alors $(\Delta)$ et $(P)$ sont parallèles. Deux cas de figures peuvent se présenter :

- soit $(\Delta)$ et $(P)$ sont strictement parallèles et n'ont donc aucun point commun ;
- soit $(\Delta)$ et $(P)$ sont confondus et ont donc une infinité de points communs.

$$\begin{aligned}(\Delta)\text{ et }(P)\text{ confondus} &\iff m=1\text{ et }A(2\,;p\,;1)\in(P)\\ &\iff m=1\text{ et }x_A-y_A+2z_A-3=0\\ &\iff m=1\text{ et }2-p+2-3=0\\ &\iff m=1\text{ et }p=1\end{aligned}$$

Par conséquent, si $m=1$ et $p=1$ alors $(\Delta)$ et $(P)$ sont confondus. Et si $m=1$ et $p\neq1$ alors $(\Delta)$ et $(P)$ sont strictement parallèles et il existe donc bel et bien au moins un réel $p$ tel que $(\Delta)\cap(P)=\emptyset$.

**c) Vrai**

Si $m\neq1$ alors $(\Delta)$ et $(P)$ ne sont pas parallèles et par conséquent quelque soit la valeur de $p$, $(\Delta)$ et $(P)$ se coupent c'est-à-dire $(\Delta)\cap(P)\neq\emptyset$.

**d) Faux**

Si $p=1$ alors $A(2\,;1\,;1)\in(P)$ car $x_A-y_A+2z_A-3=1-2+2-3=0$. Deux cas de figures sont alors à envisager :

- soit $m=1$ et dans ce cas $(\Delta)\,/\!\!/\,(P)$ et par conséquent $(\Delta)\cap(P)=\{(\Delta)\}$ ;
- soit $m\neq1$ et dans ce cas $(\Delta)$ et $(P)$ ne sont pas parallèles et $(\Delta)\cap(P)=\{A\}$.

Un contre-exemple de l'affirmation est donc le cas $m=1$ et $p=1$.

## ➽ Exercice n° 16 : FVVV - *Orthogonalité dans l'espace*

**a) Faux**

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SK} && \text{Chasles)}\\ &= \boxed{-\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}} && \text{(hypothèse)}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SJ} && \text{(Chasles)}\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SO} && \text{(hypothèse)}\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DO}\right) && \text{(Chasles)}\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} && \text{(hypothèse)}\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KB}\right) && \text{(Chasles)}\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DK} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}\right) && \text{(hypothèse précédente)}\end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SK} && \text{Chasles)}\\ &= -\overrightarrow{SD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} && \text{(hypothèse)}\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}\end{aligned}$$

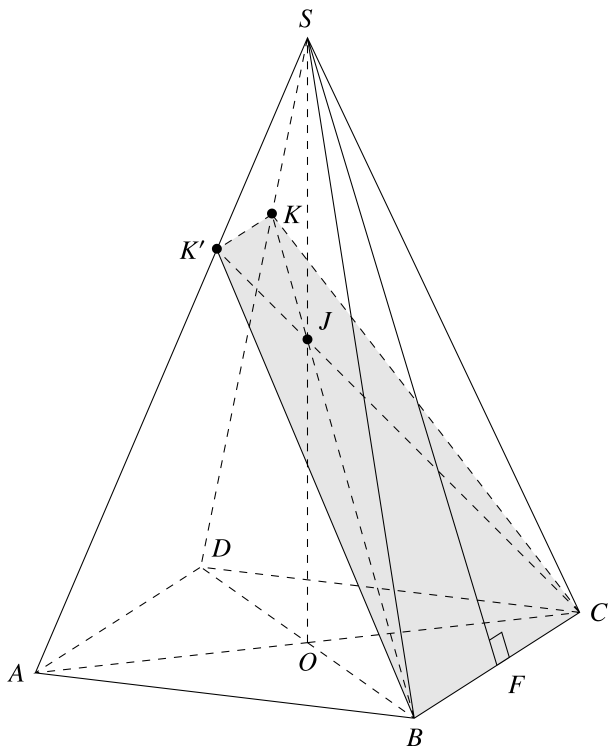
Il vient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}\right) + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}\right)\\ &= -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} - \frac{2}{12}\overrightarrow{SD} - \frac{1}{12}\overrightarrow{SD}\\ &= \boxed{-\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}}\end{aligned}$$

**b) Vrai**

D'après les relations précédentes, on constate que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires et par conséquent les points B, K et J sont alignés.

**c) Vrai**




$$\left.\begin{array}{l} K \in (BJ) \\ K \in (SD) \\ K' \in (CJ) \\ K' \in (SA) \end{array}\right\} (BJC) \cap (SAD) = \{(KK')\}$$

Or $(KK') /\!\!/ (BC)$ (configuration de Thalès) et $(BC) \perp (SF)$ donc $(KK')$ qui est défini comme étant la droite $(\Delta)$ est bien orthogonale à $(SF)$.

**d) Vrai**

Cherchons les coordonnées des points J et K dans le repère imposé. Pour cela, on exprime les vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$ en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DK} && \text{(Chasles)} \\
&= \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DS} && \text{(hypothèse précédente)} \\
&= \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS}\right) && \text{(Chasles)} \\
&= \overrightarrow{OD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{OJ} && \text{(hypothèse)} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OJ} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + 0 \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OJ} && \text{(hypothèse)}
\end{aligned}$$

Donc K a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;0\,;\frac{4}{3}\right)$ et J a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$

Cherchons à présent la représentation paramétrique de la droite (KJ) qui admet $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et qui passe par J. Sa représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{3}t + 1 \end{cases}$$

Il reste à déterminer l'intersection de la droite (KJ) avec le plan (P) d'équation cartésienne $2x + 3y - z + 4 = 0$. Pour cela, on résout l'équation :

$$\begin{aligned} 2 \times \left(\frac{1}{3}t\right) + 3 \times 0 - \left(-\frac{1}{3}t + 1\right) + 4 = 0 &\iff \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t - 1 = -4 \\ &\iff t = -3 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point d'intersection de (KJ) et de (P) sont donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \times (-3) = -1 \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{3} \times (-3) + 1 = 2 \end{cases}$$

(KJ) et (P) se coupent donc bien au point $\Omega$ de coordonnées $(-1\,;0\,;2)$.